PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. – COEFFICIENT : 6

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des séries factorielles, i.e. des séries de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$ où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes et s un nombre réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on note u_n et v_n les fonctions respectivement définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par les formules :

$$u_n(s) = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}, \quad v_n(s) = \frac{1}{(n+1)^s}.$$

I. FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE FACTORIELLE

1. Soit σ un nombre réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$w_n = \frac{u_n(\sigma)}{v_n(\sigma)}.$$

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{w_n}{w_{n-1}}$ est absolument convergente.

En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif $\ell(\sigma)$ (dépendant de σ) tel que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(\sigma)}{v_n(\sigma)} = \ell(\sigma)$.

2. Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes et σ un nombre réel strictement positif.

a. Établir que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(\sigma)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n v_n(\sigma)$ sont simultanément absolument convergentes.

b. On suppose ici que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(\sigma)$ converge absolument.

Prouver que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[\sigma, +\infty[$.

En déduire que la fonction $s \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(s)$ est continue sur l'intervalle $[\sigma, +\infty[$.

3. On note A l'ensemble constitué des suites complexes $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ pour lesquelles il existe un nombre réel σ strictement positif (dépendant de a) tel que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n u_n(\sigma)$ soit absolument convergente.

Donner des exemples de suites appartenant à A. Prouver en particulier que, pour tout nombre complexe γ, la suite $c = \left(\binom{\gamma}{n}\right)_{n \geqslant 0}$ définie par les formules :

$$\binom{\gamma}{n} = 1 \text{ si } n = 0, \quad \binom{\gamma}{n} = \frac{\gamma(\gamma - 1) \ldots (\gamma - n + 1)}{n!} \text{ si } n \geqslant 1,$$

appartient à A.

Soit $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ un élément de A. On note σ_a la borne inférieure des nombres réels $\sigma > 0$ tels que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(\sigma)$ converge absolument.

a. Montrer que la fonction $f_a : s \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(s)$ est définie et continue sur l'intervalle $]\sigma_a, +\infty[$.

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, la fonction u_n est continûment dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que, pour tout $s > 0$,

$$|u_n'(s)| \leqslant u_n(s)\left(\frac{1}{s} + \ln\left(1 + \frac{n}{s}\right)\right).$$

En déduire que la fonction f_a est continûment dérivable sur l'intervalle $]\sigma_a, +\infty[$.

c. Soit σ un nombre réel strictement supérieur à σ_a. Établir que, pour tout entier naturel N et pour tout nombre réel $s \geqslant \sigma$,

$$|f_a(s)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n| u_n(s) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| u_n(\sigma).$$

En déduire que :

$$\lim_{s \to -\infty} f_a(s) = 0.$$

d. Soient q un entier supérieur ou égal à 1 et k un entier strictement supérieur à σ_a. Montrer qu'il existe un nombre réel M strictement positif tel que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$|a_n| \leqslant M(n+1)^k.$$

Établir à partir de là que, pour tout nombre réel $s \geqslant k+2$ et tout entier $n \geqslant q+k+1$

$$|s^q a_n u_n(s)| \leqslant M \frac{(q+k+1)!}{(n+k+1)(n+k+2)}.$$

En s'inspirant de la méthode de la question précédente, prouver que :

$$\lim_{s \to +\infty} s^q \sum_{n=q}^{+\infty} a_n u_n(s) = 0.$$

En conclure que, pour tout entier naturel q,

$$\lim_{s \to +\infty} s^{q+1} \sum_{n=q}^{+\infty} a_n u_n(s) = q!\, a_q.$$

4. Soient σ un nombre réel positif et f une application de $]\sigma, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est développable en série factorielle sur l'intervalle $]\sigma, +\infty[$ s'il existe un élément $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ appartenant à A tel que :

(i) $\sigma_a \leqslant \sigma$;

(ii) pour tout $s > \sigma$, $f(s) = f_a(s)$.

a. Soient $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ et $b = (b_n)_{n \geqslant 0}$ deux éléments de A. Montrer que la fonction $f_a + f_b$ est développable en série factorielle sur l'intervalle $]\max(\sigma_a, \sigma_b), +\infty[$.

b. Soit f une fonction développable en série factorielle sur l'intervalle $]\sigma, +\infty[$. Montrer que ce développement est unique.

II. REPRÉSENTATION INTÉGRALE D'UNE FONCTION DÉVELOPPABLE EN SÉRIE FACTORIELLE

1. Soit n un entier naturel.

a. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{n!}{X(X+1)\ldots(X+n)}$.

b. Vérifier que, pour tout nombre réel $s > 0$ et tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{s-1+k}\,dy$ est absolument convergente et que :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1+k}\,dy = \frac{1}{s+k}.$$

c. Prouver que, pour tout nombre réel $s > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{s-1}\,y^n\,dy$ est absolument convergente. À l'aide d'un changement de variable affine, déduire de II.1.*a.* et II.1.*b.* que :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1}\,y^n\,dy = \frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n)}.$$

En conclure que, pour tout élément $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ de A et tout nombre réel s strictement supérieur à σ_a,

$$f_a(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{s-1}\,y^n\,dy.$$

2. Soit $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de A.

a. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note ϕ_a la fonction définie sur $[0, 1[$ par la formule $\phi_a(s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$.

Vérifier que la fonction $y \longmapsto (1-y)^{s-1}\,\phi_a(y)$ où $s \in]0, +\infty[$ est continue sur $[0, 1[$.

b. Prouver que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \chi_n$, où χ_n est la fonction $y \longmapsto (1-y)^{s-1}\,y^n$ avec $s > 0$, est normalement convergente sur tout segment contenu dans $[0, 1[$ et que, pour tout $y \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-y)^{s-1}\,y^n = (1-y)^{s-1}\,\phi_a(y).$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{s-1}\,\phi_a(y)\,dy$ est absolument convergente pour tout $s > \sigma_a$. (On pourra montrer que la fonction $X \longmapsto \displaystyle\int_0^X (1-y)^{s-1}|\,\phi_a(y)|\,ds$ est majorée sur $[0, 1[$).

c. Soit s un nombre réel strictement supérieur à σ_a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, la fonction $\varphi_n : x \longmapsto \int_0^x (1-y)^{s-1} a_n y^n \, dy$ est définie et continue sur le segment $[0, 1]$. Établir que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n$ converge normalement sur le segment $[0, 1]$. En déduire que :

$$\lim_{x \to 1,\, x<1} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(1).$$

d. Établir enfin que la fonction $s \longmapsto \int_0^1 (1-y)^{s-1} \phi_a(y) \, dy$ est développable en série factorielle sur l'intervalle $]\sigma_a, +\infty[$ et que, pour tout $s > \sigma_a$,

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} \phi_a(y) \, dy = f_a(s).$$

3. *Exemples.*

a. Soient N un entier naturel, $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par les formules $a_n = 0$ si $0 \leqslant n < N$, $a_n = 1$ si $n \geqslant N$.

Vérifier que la suite a appartient à A et que $\sigma_a = 1$. En déduire que, pour tout $s > 0$,

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{n!}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n+1)} = \frac{N!}{s(s+1)\ldots(s+N)}.$$

b. Soient λ un nombre complexe et $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par la relation $a_n = \dfrac{\lambda^n}{n!}$.

Prouver que la suite a appartient à A et que $\sigma_a = 0$.

En conclure que la fonction $g : s \longmapsto \int_0^1 (1-y)^{s-1} e^{\lambda y} \, dy$ est développable en série factorielle sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Montrer de plus que, pour tout $s > 0$,

$$g(s) = e^{\lambda} \int_0^1 y^{s-1} e^{-\lambda y} \, dy.$$

Prouver que, pour tout $s > 0$, la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1}^{+\infty} (-1)^n y^{s-1} \dfrac{y^n}{n!}$ est intégrable terme à terme sur le segment $[0, 1]$. En déduire que, pour tout $s > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{s(s+1)\ldots(s+n)} = e^{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\lambda^n}{s+n}.$$

c. Soit α un nombre complexe. On note h_α la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ par la formule :

$$h_\alpha(t) = (1-t)^{-\alpha} = \exp(-\alpha \ln(1-t)).$$

Montrer que la fonction h_α est continûment dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ et que $h'_\alpha = \alpha h_{\alpha+1}$. Prouver que la fonction h_α est l'unique solution sur l'intervalle $]-1, 1[$ du problème de CAUCHY :

$$(C)\begin{cases} (1-t)y'(t) = \alpha y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que le problème de CAUCHY (C) admet une solution développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$. En conclure que, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$(1-t)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha - 1 + n}{n} t^n.$$

Prouver que la suite $a = \left(\binom{\alpha - 1 + n}{n}\right)_{n \geqslant 0}$ appartient à A et que $\sigma_a \leqslant |\alpha|$. En conclure que la fonction $s \longmapsto \dfrac{1}{s-\alpha}$ est développable en série factorielle sur l'intervalle $]|\alpha|, +\infty[$ et que pour tout $s > |\alpha|$,

$$\frac{1}{s-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha - 1 + n}{n} \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

III. STABILITÉ DE LA CLASSE DES FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE FACTORIELLE PAR DÉRIVATION

Soit $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ un élément de A. On se propose d'établir que la fonction f'_a est développable en série factorielle sur l'intervalle $]\sigma_a, +\infty[$. Pour ce faire, on utilise la représentation intégrale de la fonction f_a et, pour tout entier $k \geqslant 2$, on note g_k la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par la formule :

$$g_k(s) = \int_0^{1-\frac{1}{k}} (1-y)^{s-1} \phi_a(y)\, dy.$$

a. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, la fonction g_k est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que, pour tout $s > 0$,

$$g'_k(s) = \int_0^{1-\frac{1}{k}} (1-y)^{s-1} \phi_a(y) \ln(1-y)\, dy.$$

b. Montrer que, pour tout $s > \sigma_a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{s-1} \phi_a(y) \ln(1-y)\, dy$ est absolument convergente (on pourra introduire un nombre réel σ tel que $\sigma_a < \sigma < s$ et écrire que :

$$(1-y)^{s-1} \phi_a(y) \ln(1-y) = \left((1-y)^{\sigma-1} \phi_a(y)\right)\left((1-y)^{s-\sigma} \ln(1-y)\right).$$

En déduire que la suite de fonctions $(g'_k)_{k \geqslant 2}$ converge uniformément sur tout intervalle fermé contenu dans l'intervalle $]\sigma_a, +\infty[$ vers la fonction $s \longmapsto = \displaystyle\int_0^1 (1-y)^{s-1} \phi_a(y) \ln(1-y)\, dy$ lorsque k tend vers $+\infty$. En conclure que, pour tout $s > \sigma_a$,

$$f'_a(s) = \int_0^1 (1-y)^{s-1} \phi_a(y) \ln(1-y)\, dy.$$

c. Montrer que la fonction $\psi_a : y \longmapsto \phi_a(y) \ln(1-y)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $b_n = \dfrac{\psi_a^{(n)}(0)}{n!}$. Vérifier que $b_0 = 0$ et que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p}.$$

Soient σ un nombre réel > 0 et N entier $\geqslant 1$. Établir que :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^\sigma} \leqslant \sum_{p=0}^{N-1} |a_p| \left(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^\sigma} \right).$$

Prouver que, pour tout entier p tel que $0 \leqslant p < N$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^\sigma}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^\sigma} \leqslant \frac{1}{(p+1)^\sigma} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^\sigma}.$$

En partageant l'intervalle $[1, +\infty[$ en les intervalles partiels $[1, p+1[$ et $[p+1, +\infty[$, établir que :

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^\sigma} \leqslant \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \frac{1}{(p+1)^\sigma} + \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^\sigma}.$$

En conclure que, pour tout nombre réel $\sigma > \sigma_a$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{(n+1)^\sigma}$ converge absolument.

d. Déduire de ce qui précède que la fonction f_a' est développable en série factorielle sur l'intervalle $]\sigma_a, +\infty[$ et que, pour tout $s > \sigma_a$,

$$f_a'(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n(s).$$

Plus généralement, établir que f_a est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]\sigma_a, +\infty[$ et que ses dérivées successives sont développables en série factorielle sur cet intervalle.

2. Soit α un nombre complexe. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la fonction $s \longmapsto \frac{1}{(s-\alpha)^p}$ est développable en série factorielle sur l'intervalle $]|\alpha|, +\infty[$.

3. Soit F une fonction rationnelle à coefficients complexes. Établir que la fonction F est développable en série factorielle sur un intervalle de la forme $]\sigma, +\infty[$, si et seulement si $\lim_{s \to -\infty} F(s) = 0$.

IV. APPLICATION NUMÉRIQUE

On se propose de calculer une valeur approchée de la somme S de la série convergente $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.

1. En utilisant une intégrale généralisée, donner un majorant du reste $\sum_{p=N+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$. En déduire une valeur de l'entier N pour que $S_N = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2}$ approche S à 10^{-4} près.

2. Pour accélérer le calcul on utilise le fait que la fonction $s \longmapsto \frac{1}{s^2}$ est développable en série factorielle sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

a. Établir que, pour tout $s > 0$,

$$\frac{1}{s^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{s(s+1)\ldots(s+n)}.$$

b. Prouver qu'il existe un polynôme P à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4 tel que, pour tout $s > 0$,

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{s(s+1)\ldots(s+n)} = \frac{P(s)}{s^2(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

À l'aide de II.3.a., montrer que P est le polynôme constant égal à 24. En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{n=1}^{4} \frac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n)} + \frac{24}{p^2(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

c. Établir que :

$$S = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n^2} + 24 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

(Pour calculer $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n)}$, où n est un entier tel que $1 \leqslant n \leqslant 4$, on pourra observer que $\frac{(n-1)!}{p(p+1)\ldots(p+n)} = \frac{(p-1)!}{n(n+1)\ldots(n+p)}$ et utiliser IV.2.b

En déduire que, pour tout entier $N \geqslant 1$, le nombre rationnel T_N défini par la formule :

$$T_N = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n^2} + 24 \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$$

est une valeur approchée par défaut du nombre réel S à $\frac{5}{N^5}$ près.

Déterminer un entier N pour que :

$$S - T_N \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}.$$

En donnant toutes les justifications utiles concernant la précision des calculs, fournir une valeur approchée de S à 10^{-4} près.